The asymptotic Dirichlet problem for harmonic mappings between Hadamard manifolds

芥川, 和雄

数理解析研究所講究録
770巻 1991年 44-55

The asymptotic Dirichlet problem for harmonic mappings between Hadamard manifolds

日本文理大・工　芥川和雄(Kazuo Akutagawa)

本稿では，Hadamard 多様体間の調和写像に対する漸近的 Dirichlet 問題（以後 ADP と略す）を定義し，それに関する最近の結果（特に，Li-Tam [10] の結果）について紹介する。

§1. ADP の定義.　$M=(M^m, g)$, $N=(N^n, h)$ を Riemann 多様体とする。特に，M はコンパクトと仮定する。C^∞ 写像 $u: M \longrightarrow N$ に対して，そのエネルギー $E(u)$ を次で定義する。

$$E(u)=\frac{1}{2}\int_M |du|^2 dv_g$$

u が調和写像であるとは，エネルギー $E(\cdot)$ の臨界点であるときに言う。E に対する Euler-Lagrange 方程式を書き下すと

$$\text{(1.1)} \qquad \triangle u^j := \Delta_M u^j + g^{\alpha\beta}\Gamma^j_{kl}(u)\frac{\partial u^k}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^l}{\partial x^\beta}=0 \quad \text{for } j=1,\cdots,n$$

となる。ここで，$x=(x^1,\cdots,x^m)$, $u=(u^1,\cdots,u^n)$ はそれぞれ M, N 上の局所座標系を表わすものとする。方程式 (1.1) は非線型の楕円型偏微分方程式となる。M がコンパクトでない場

合は方程式(1.1)によって調和写像を定義する。

今，MをHadamard多様体(i.e.単連結，非正曲率，完備Riemann多様体)とする。Mの無限遠境界$M(\infty)$は，M内の半直線のasymptotic classの全体の集合として定義される。ここで2つの半直線γ_1, γ_2がasymptoticであるとは，$\mathrm{dist}_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ $(t \geqq 0)$が有界のときに言う。$\overline{M} := M \cup M(\infty)$にはcone topologyと呼ばれるある自然な位相が導入される。その定義はここでは与えないが([4],[7]を参照)，3つ組$(\overline{M}, M, M(\infty))$は位相的に$(\overline{B^m}, B^m, S^{m-1})$と同一視される。ここで，$B^m = \{x \in \mathbb{R}^m ; |x| < 1\}$，$S^{m-1} = \partial B^m$とする。特に$M(\infty)$はコンパクトである。また，$M(\infty)$には一般には$C^0$構造しか導入できないことが知られている。

Nもまた Hadamard多様体とする。そのとき次の問題を提起できる。

ADP for harmonic mappings between Hadamard manifolds.

$\varphi : M(\infty) \longrightarrow \overline{N}$を$C^0$写像とする。そのとき次を満たす写像$u \in C^\infty(M, N) \cap C^0(\overline{M}, \overline{N})$を求めよ。

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } M, \\ u = \varphi & \text{on } M(\infty). \end{cases}$$

§2. 境界値φの像$\mathrm{Im}\,\varphi$が有界な場合.

上述の(1.2)で，$\mathrm{Im}\,\varphi$が有界な場合には次の定理が得られている。

定理1（[1]，[5]）.　M, N を Hadamard 多様体とする。Mの断面曲率K_Mは $-b^2 \leqq K_M \leqq -a^2 < 0$ を満たすものとする。そのとき各境界値 $\varphi \in C^0(M(\infty), N)$ に対して，ADP (1.2) は一意的に解ける。

注.　Avilés－Choi－Micallef [5] では，Nに対する条件および境界値φの正則性について，もう少し弱い条件のもとで上の結果を得ている。

定理1は，次の定理2の一般化で，定理1における証明の中でも本質的に用いられる。

定理2（[3]，[11]）.　Mを Hadamard 多様体とし，その断面曲率K_Mは $-b^2 \leqq K_M \leqq -a^2 < 0$ を満たすものとする。そのとき各 $\psi \in C^0(M(\infty))$ を境界値にもつ，調和関数 $v \in C^\infty(M) \cap C^0(\overline{M})$ が一意的に存在する。

§3. 非コンパクト多様体間の調和写像に対する放物型方程式について. ADP (1.2) で $\mathrm{Im}\,\varphi$ が非有界である場合を扱う前に，次の調和写像に対する放物型方程式（以後，放物型調和方程式と呼ぶ）を考察する。

$$
(3.1)_T \qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{on} \quad M \times (0,T), \\ u|_{M\times\{0\}} = u_0, \end{cases}
$$

for $u \in C^\infty(M\times(0,T), N) \cap C^0(M\times[0,T), N)$.

ここでは M, N が必ずしもコンパクトとは限らない場合についての最近の結果を紹介する。具体的には，次の Eells-Sampson 等の定理の一般化について解説する。

定理3 (Eells-Sampson [8]). M, N をコンパクト Riemann 多様体とし，N はいたるところ非正断面曲率 $K_N \leqq 0$ をもつとする。そのとき各初期値 $u_0 \in C^\infty(M,N)$ に対して，放物型調和方程式 $(3.1)_T$ は $T=\infty$ まで一意的に解け，$u(\cdot,t)$ は $t \longrightarrow \infty$ のとき C^∞ 位相である調和写像 $u_\infty : M \longrightarrow N$ に収束する。特に u_∞ と u_0 はホモトピックである。

定理4 (Hartman [9]). M, N をコンパクト Riemann 多様体とし，N はいたるところ負の断面曲率 $K_N < 0$ をもつものとす

る。そのとき，$C^\infty(M,N)$ の各ホモトピー類に対して一意的に調和写像が存在する。

Eells-Sampson は $(3.1)_T$ の解の short time existence を非線型作用素 $(\triangle - \partial_t)$ の基本解を構成することによって証明した。その構成にはコンパクト多様体上の熱作用素 $(\triangle - \partial_t)$ の基本解のもつ性質 (mean-value inequalities, gradient estimates 等) が有効に使われた。非コンパクト多様体の場合にも，Li, Yau 等によって $(\triangle - \partial_t)$ の基本解のもつ性質は詳しく調べられており，それを用いて $\mathrm{Im}\, u_0$ が有界なケースの初期値 $u_0 \in C^1(M,N)$ に関しては，$(\triangle - \partial_t)$ の基本解が構成される。以後，M，N を必ずしもコンパクトとは限らない完備 Riemann 多様体とする。以下の結果は全て，Li-Tam [10] によるものである。

<u>定理5</u> (Short time existence). M は Ricci 曲率 Ric_M が下から有界とする。初期値 $u_0 \in C^1(M,N)$ は energy density $e(u_0) := \frac{1}{2}|du_0|^2$ が有界かつ $\mathrm{Im}\, u_0$ が N 内で有界とする。そのときある正数 $T_0 > 0$ が存在して，放物型調和方程式 $(3.1)_{T_0}$ は一意的に解ける。

更に N の断面曲率は非正 $K_N \leqq 0$ とすると，次の long time existence を得ることができる。

定理 6 (Long time existence). 定理 5 の条件に加えて，N の断面曲率は非正 $K_N \leqq 0$ とする。そのとき放物型調和方程式 $(3.1)_T$ は $T=\infty$ まで一意的に解けて，次をみたす。

(i) 各 $T>0$ に対して，$u(M\times[0,T])$ は有界。

(ii) 各 $T>0$ に対して，$\sup_{M\times[0,T]} e(u) < \infty$.

次の補題を使うと，初期値 u_0 の $\mathrm{Im}\, u_0$ が有界という（像が非有界な調和写像を構成する立場からは）好ましくない仮定を省くことができる。

補題 1. X を Hadamard 多様体とし，点 $o \in X$ を固定する。そのとき各 $r>0$ に対して，次の性質をもつ C^∞ 写像 $\phi_r : X \longrightarrow X$ が存在する。

(i) $\phi_r|_{B_r(o)} = id$.

(ii) $\phi_r(X) \subset B_{2r}(o)$.

(iii) $\sup_X e(\phi_r) \leqq C$.

ここで，$B_r(o) := \{ p\in X ; dist_X(p,o) < r \}$，C は r に依存しない定数である。

初期値 $u_0 \in C^1(M,N)$ は energy density $e(u_0)$ が有界ということのみを仮定する。補題1 の X として N の universal covering $\tilde{N}$ をとる。$\tilde{u}_0 : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{N}$ を $u_0 : M \longrightarrow N$ の lifting とする。ここで $\tilde{M}$ は M の universal covering を表わす。そして各 $r > 0$ に対して $\tilde{u}_{0,r} := \phi_r \circ \tilde{u}_0$ とおくと，補題1-(ii) より $\mathrm{Im}\, \tilde{u}_{0,r} \subset B_{2r}(o)$ となり，定理6 より $\tilde{u}_{0,r}$ を初期値とする放物型調和方程式 $(3.1)_\infty$ の解 $\tilde{u}_r$ が得られる。補題1-(i),(iii) より，$\tilde{u}_r$ は $r \to \infty$ とするとき $\tilde{u}_0$ を初期値とする放物型調和方程式 $(3.1)_\infty$ の解 $\tilde{u}$ に収束することが示せる。$\tilde{u}_0$ は $\tilde{M}$ 及び $\tilde{N}$ の deck transformation で不変であることから，$\tilde{u}$ もそうであることが示せ次の結果を得る。

<u>定理6′</u> (Long time existence).　Ric_M は下から有界，$K_N \leqq 0$ と仮定する。初期値 $u_0 \in C^1(M,N)$ は energy density $e(u_0)$ が有界とする。そのとき放物型調和方程式 $(3.1)_T$ は $T = \infty$ まで一意的に解けて，次を満たす。

$$\text{各 } T > 0 \text{ に対して，} \sup_{M \times [0,T]} e(u) < \infty .$$

上の $u(\cdot, t)$ が調和写像に収束するための条件としては次が得られている。

<u>定理7.</u>　M は Ric_M が下から有界で，$\inf_{x\in M} Vol(B_1(x)) > 0$ かつ最小スペクトルは正 $\lambda(M) > 0$ とする。N の断面曲率は非正 $K_N \leqq 0$ とする。初期値 $u_0 \in C^2(M, N)$ は次を満たすとする。

(a)　$\sup_M e(u_0) < \infty$.

(b)　$\sup_M |\Delta u_0| < \infty$.

(c)　$|\Delta u_0|^2 \in L^p(M)$　for $^\exists p > 1$.

そのとき定理6′で得られた解 $u(\cdot, t)$ は，$t \longrightarrow \infty$ とするとき C^∞ 位相である調和写像 $u_\infty \in C^\infty(M, N)$ に収束し，次を満たす。

(i)　$\sup_M e(u_\infty) < \infty$.

(ii)　$\sup_{x\in M} dist_N(u_\infty(x), u_0(x)) < \infty$.

(iii)　更に $x \longrightarrow \infty$ のとき $|\Delta u_0| \longrightarrow 0$ であることを仮定すると，$\lim_{x\to\infty} dist_N(u_\infty(x), u_0(x)) = 0$ である。

<u>§4.　Hyperbolic space 間の調和写像について.</u>　$\mathrm{Im}\,\varphi$ が非有界である場合のADP(1.2)については，hyperbolic space 間についての結果しか知られていないようである。定曲率 -1 の m 次元 hyperbolic space $\mathbb{H}^m$ は，Poincaré model (B^m, h)，$h = \dfrac{4}{(1-|\mathrm{x}|^2)^2}\delta_{ij}dx^i dx^j$　$\mathrm{x} = (x^1, \cdots, x^m) \in B^m$ で実現される。無限遠境界 $\mathbb{H}^m(\infty)$ には，同一視 $\mathbb{H}^m(\infty) \cong S^{m-1}$ により自然な C^∞ 構造を導入できる。またこの同一視により $\mathbb{H}^m(\infty)$ に

は S^{m-1} の標準的Riemann計量が導入されているものとする（ただし，この計量は自然なものではない）。そのとき $\mathrm{Im}\,\varphi$ が非有界であるＡＤＰ(1.2)に関する次の定理が成立する。

定理8. ([10] ([2] for $m=n=2$)). $\varphi : S^{m-1}(\cong \mathbb{H}^m(\infty)) \longrightarrow S^{n-1}(\cong \mathbb{H}^n(\infty))$ は C^3級写像でいたる所 $e(\varphi) \neq 0$ とする。そのとき調和写像 $u : \mathbb{H}^m \longrightarrow \mathbb{H}^n$ で境界値が $u|_{S^{m-1}} = \varphi$ となるものが存在して，次をみたす

$$\sup_{\mathbb{H}^m} e(u) < \infty .$$

更に，$m=n=2$ の時には次が示せる。

定理9. ([2], [10]). $\varphi : S^1(\cong \mathbb{H}^2(\infty)) \longrightarrow S^1(\cong \mathbb{H}^2(\infty))$ を C^3級微分同相写像とする。そのとき調和微分同相写像 $u : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ で境界値が $u|_{S^1} = \varphi$ となるものが存在して，次を満たす。

(i) $\sup_{\mathbb{H}^2} e(u) < \infty .$

(ii) $\inf_{\mathbb{H}^2} |J(u)| > 0 .$

ここで，$J(u)$ は u の Jacobian を表わす。

定理8は，barrier map f をうまく構成し定理7を適用することによって示される。$(\rho, \eta^2, \cdots, \eta^m)$，$(r, \theta^2, \cdots, \theta^n)$ $(0<\rho, r<1)$

をそれぞれ B^m, B^n の標準的な極座標とする。barrier map $f(\rho,(\eta^\alpha)) = (r,(\theta^j))$ は具体的に次の様に構成する。

$$(*)\quad \begin{cases} r(\rho,\eta^2,\cdots,\eta^m) = 1-(1-\rho)\sqrt{\dfrac{e(\varphi)}{m-1}} \\[2ex] \theta^j(\rho,\eta^2,\cdots,\eta^m) = \varphi^j(\eta^2,\cdots,\eta^m), \qquad j=2,\cdots,n, \end{cases}$$

for $(\rho,(\eta^\alpha)) \in B^m \setminus \{0\}$. ここで φ は定理8の $\varphi=(\varphi^2,\cdots,\varphi^n) : S^{m-1} \longrightarrow S^{n-1}$ を表わす。また f は B^m の原点の近傍では C^2 級写像となる様に適当に修正されているものとする。そのとき次が成立する。

<u>補題2.</u>　(*)で定義された f は次の性質をもつ。

(i)　$f: \mathbb{H}^m \longrightarrow \mathbb{H}^n$ は C^2 級で，$f|_{\mathbb{H}^m(\infty)} = \varphi$.

(ii)　$\sup_{\mathbb{H}^m} e(f) < \infty$.

(iii)　$x \to \infty$ のとき，$|\Delta f| \longrightarrow 0$.

(iv)　$|\Delta f|^2 \in L^k(\mathbb{H}^m)$　for $\forall k \geqq \frac{m}{2}$.

定理7で，$M=\mathbb{H}^m$, $N=\mathbb{H}^n$, $u_0=f$ とおくと，上の補題2より定理7の結論が導け，u_∞ が求める調和写像となる。ここで，$\lambda(\mathbb{H}^m) = \frac{1}{4}(m-1)^2$ であることに注意をしておく。

<u>注.</u>　(1)　定理7における解 u の一意性については，現在の

ところ何も結果が得られていない。また，もし一意性が成立しないとしても，ADPの解の一意性が成立する様な$\overline{\mathbb{H}^m}$の位相はどの様なものかは，興味ある話題である。

(2) 補題2の性質はhyperbolic spaceという特別な（対称性の高い）空間の性質に大きく依存しており，ADPをもう少し一般のHadamard多様体間でとらえることとはかなりの差がある。しかしながら，m次元Hadamard多様体からm次元hyperbolic spaceへの像が非有界である調和写像の一つの構成法がChoi-Treibergs[6]によって得られていることも注意しておく。

———————以上———————

References

[1] K. Akutagawa, The Dirichlet problem at infinity for harmonic mappings between Hadamard manifolds, "Geometry of Manifolds", Academic Press, 1989, pp. 59－70.

[2] K. Akutagawa, Harmonic diffeomorphisms of the hyperbolic plane, preprint.

[3] M.T. Anderson, The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature, J. Diff. Geom., 18(1983), 701－721.

[4] M. T. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, Ann. of Math., 121 (1985), 429–461.

[5] P. Avilés, H. I. Choi and M. J. Micallef, Boundary behavior of harmonic maps on non-smooth domains and complete negatively curved manifolds, preprint.

[6] H. I. Choi and A. Treibergs, Gauss maps of spacelike constant mean curvature hypersurfaces of Minkowski space, to appear in J. Diff. Geom..

[7] P. Eberlein and B. O'Neill, Visibility manifolds, Pacific J. Math., 46 (1973), 45–109.

[8] J. Eells and J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math., 86 (1964), 109–160.

[9] P. Hartman, On homotopic harmonic maps, Canadian J. Math., 19 (1967), 673–687.

[10] P. Li and L.-F. Tam, The heat equation and harmonic maps of complete manifolds, preprint.

[11] D. Sullivan, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold, J. Diff. Geom., 18 (1983), 723–732.